

Informatik D: Einführung in die Theoretische Informatik
Klausur — SoSe 2018 — 9. Juli 2018

Haupttermin, Prüfungsnr. 1007049

Gruppe: Erdnuss / Himbeere

Unbedingt ausfüllen

Matrikelnummer	Studiengang/Abschluss	Fachsemester
<input style="width: 100%;" type="text"/>	<input style="width: 100%;" type="text"/>	<input style="width: 100%;" type="text"/>
Nachname	Vorname	
<input style="width: 100%;" type="text"/>	<input style="width: 100%;" type="text"/>	
Unterschrift	Identifikator <small>(Beliebiges Wort zur Identifikation im anonymen Notenaushang)</small>	
<input style="width: 100%;" type="text"/>	<input style="width: 100%;" type="text"/>	

Grundregeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Sie schreiben diese Klausur **vorbehaltlich** der Erfüllung der **Zulassungsvoraussetzung**. Das heißt: Wir werden Ihre Zulassung vor Korrektur prüfen; die Tatsache, dass Sie die Klausur mitschreiben, bedeutet keine implizite Zulassung.
- Es sind **keine Unterlagen** und auch **keine** anderen **Hilfsmittel** erlaubt.
- Benutzen Sie nur dokumentenechten (blauen oder zur Not schwarzen) **Kugelschreiber!** Bleistiftlösungen werden nicht gewertet!
- Es zählt die Antwort, die sich im dafür vorgesehenen Kästchen befindet! Soll eine andere Antwort gewertet werden, so ist diese **eindeutig** zu kennzeichnen!
- Jegliches Schummeln, und auch der Versuch desselben, führt zum Ausschluss von der Klausur und einer Bewertung mit **5,0**.

Wird vom Korrektor/Prüfer ausgefüllt

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte (max)	14	14	14	8	16	8	8	18	20	120
Punkte (erreicht)										

Punkte	0..59	60..66	67..73	74..77	78..82	83..87	88..91	92..96	97..100	101..107	108..120
Note	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Note:

Aufgabe 1: Sprachgrundlagen

(14 Punkte)

(a) Faktenwissen

(6 Punkte)

Welche Form hat eine Grammatik, die eine kontextfreie Sprache beschreibt?

Von welchem Maschinenmodell werden genau die kontextsensitiven Sprachen beschrieben?

Welche Sprachfamilie wird genau durch eine NDTM beschrieben?

(b) Zuordnung von Sprachen

(8 Punkte)

Zu welcher der *fünf* in der Vorlesung besprochenen Sprachfamilien innerhalb der Chomsky-Hierarchie gehören die folgenden Sprachen? Geben Sie dabei die *kleinste* Sprachfamilie an, die gerade mächtig genug ist, die entsprechende Sprache zu erkennen.

$$\{x^i y^j z^j \mid i, j \in \mathbb{N}, j \geq 2\}$$

$$(\{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup \{c\}^*) \cap \overline{\{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}}$$

über $\Sigma = \{a, b, c\}$

$$S \rightarrow xB \mid yB \mid \varepsilon, \quad B \rightarrow xB \mid zB \mid y$$

$$L \subseteq \{0, 1\}^*, \text{ wobei } \bar{L} \text{ eine deterministisch} \\ \text{kontextfreie Sprache ist}$$

Aufgabe 2: Äquivalenz der Beschreibungen regulärer Sprachen (14 Punkte)

(a) **Anwendung** (4 Punkte)

Geben Sie einen NDEA an, der genau die Sprache über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ akzeptiert, die von dem folgenden regulären Ausdruck erzeugt wird: $10(22|02)^+2$

(b) **Algorithmus** (10 Punkte)

Beschreiben Sie das Verfahren aus der Vorlesung, das einen äquivalenten NDEA für einen gegebenen regulären Ausdruck erzeugt.

Aufgabe 3: Pumping Lemma

(14 Punkte)

(a) **Definition**

(4 Punkte)

Wie lautet das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen?

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann...

... $z = uvwxy$ mit den Eigenschaften

(1) , (2) und (3) .

(b) **Anwendung**

(10 Punkte)

Beweisen Sie, dass $L := \{2^k \beta 2^k \mid \beta \in \{0, 1\}^*, |\beta| = k/2\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 4: Rechnende Turingmaschine

(8 Punkte)

Problem: ZAHLKONVERTIERUNG

Gegeben: Die binäre Darstellung einer Zahl $\alpha \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Die unäre Darstellung von α .

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die das Problem ZAHLKONVERTIERUNG löst. Dazu dürfen Sie einen LBA \mathcal{S} , der von einer gegebenen Binärzahl 1 subtrahiert, als Black Box verwenden.

Aufgabe 5: Berechenbarkeit

(16 Punkte)

WHILE-Programme sind Turing-vollständig, selbst wenn alle Vergleichsoperationen nur mit 0 verglichen und alle Variablen initial auf 0 gesetzt sind. Sei WHILE^{42} die Teilmenge aller dieser WHILE-Programme mit der Einschränkung, dass die größte Konstante, die in einer Operation auftritt, 42 ist.

(a) **Vollständigkeit**

(2 Punkte)

Warum lässt sich jedes WHILE-Programm durch ein WHILE^{42} -Programm simulieren?

(b) **Halteproblem**

(8 Punkte)

Sei WHILE_d^{42} die Teilmenge aller WHILE^{42} -Programme, deren Variablen höchstens Wert d annehmen können. Warum ist das Halteproblem für WHILE_d^{42} -Programme entscheidbar?

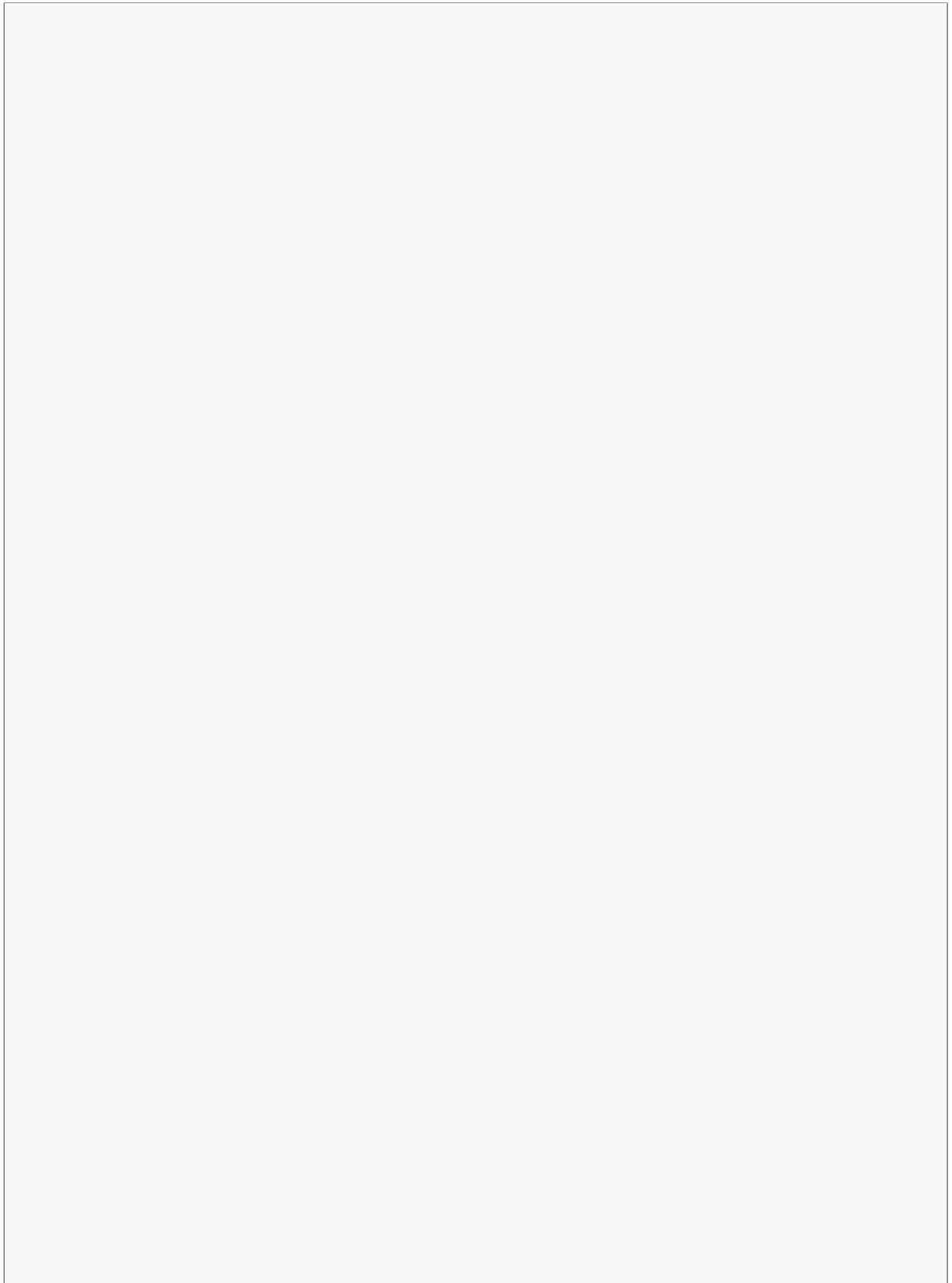
(c) **Fleißige WHILE-Programme**

(6 Punkte)

Sei $\text{WHILE}^{42}(n)$ die Teilmenge aller WHILE^{42} -Programme, die aus höchstens n Anweisungen bestehen.

Die Funktion $\varrho(n)$ gibt den größten Wert an, der bei Aufruf eines terminierenden Programms aus $\text{WHILE}^{42}(n)$ einer der Variablen zugewiesen wird. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Die Funktion $\varrho(n)$ ist nicht berechenbar.



Aufgabe 6: Zusammenhänge in Berechenbarkeit

(8 Punkte)

(a) Ankreuzen

(5 Punkte)

Bewertung: Pro Aussage gibt es 1/0/-1 Punkte bei einer richtigen/keinen/falschen Antwort! Es gibt jedoch keine negativen Punkte für diese Teilaufgabe.

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht co-semi-entscheidbar. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Die Frage nach der Existenz einer nicht-periodischen Lösung des Wang-Parketts ist entscheidbar. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Ist $L \subseteq \{0, 1\}^*$ semi-entscheidbar oder co-semi-entscheidbar, dann ist L entscheidbar. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Die folgende Sprache ist unentscheidbar:
$\{\mathbb{W}(M) \mid M \text{ ist eine rechnende TM und } M(x) = (2x + 10) \bmod 5 \text{ für alle } x \in \mathbb{N}\}$. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Ist $L \subseteq \{0, 1\}^*$ rekursiv aufzählbar, dann ist L unentscheidbar. |

(b) Beweis

(3 Punkte)

Beweisen Sie eine der **oben als wahr angekreuzten** Aussagen Ihrer Wahl. Kennzeichnen Sie die gewählte Aussage.

Aufgabe 7: Zusammenhänge Komplexitätstheorie

(8 Punkte)

(a) Ankreuzen

(5 Punkte)

Bewertung: Pro Aussage gibt es 1/0/-1 Punkte bei einer richtigen/keinen/falschen Antwort! Es gibt jedoch keine negativen Punkte für diese Teilaufgabe.

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: NPC ist die Klasse der NP-vollständigen Probleme.

Wahr Falsch

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Falls $P \neq NP$: Es gibt $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ sodass A polynomiell auf B reduzierbar ist, aber B nicht auf A . |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Wenn TAUTOLOGIE polynomiell auf 3SAT reduzierbar ist, dann ist $NP = Co-NP$. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Wenn $P \neq NP$ und das Problem \mathcal{X} in exponentieller Zeit entschieden werden kann, dann ist \mathcal{X} NP-schwer. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $P \neq NP \implies P \cup NPC = NP$. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $P = NP \implies NP = Co-NP$. |

(b) Beweis

(3 Punkte)

Beweisen Sie eine der oben als wahr angekreuzten Aussagen Ihrer Wahl. Kennzeichnen Sie die gewählte Aussage.

Aufgabe 8: Randomisierte Algorithmen

(18 Punkte)

(a) Definitionen

(4 Punkte)

Wie lautet die Definition von *Co-RP*?

Ein Entscheidungsproblem liegt in <i>Co-RP</i> , wenn ein <input type="text"/>
$\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ Atlantic-City} \quad \square \text{ Las-Vegas} \quad \square \text{ Monte-Carlo} \end{array} \right\}$ -Algorithmus existiert, der
— Nein-Instanzen mit Wahrscheinlichkeit <input type="text"/> und
— Ja-Instanzen mit Wahrscheinlichkeit <input type="text"/> korrekt erkennt.

(b) Algorithmus

(8 Punkte)

In der Genetik gibt es vier verschiedenen Basen: Adenin (A), Cytosin (C), Guanin (G) und Thymin (T). Dabei bilden jeweils Adenin und Thymin sowie Cytosin und Guanin ein sogenanntes Basenpaar. Ein *DNA-Strang* ist ein String $D \in \{A, C, G, T\}^*$. Ein *Doppelstrang* ist ein Paar von gleich langen DNA-Strängen (D_1, D_2) mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Base $D_1[i]$ muss $D_2[i]$ genau das zugehörige Basenpaar ergänzen. Zum Beispiel falls $D_1[3] = G$ ist, so muss $D_2[3] = C$ gelten.

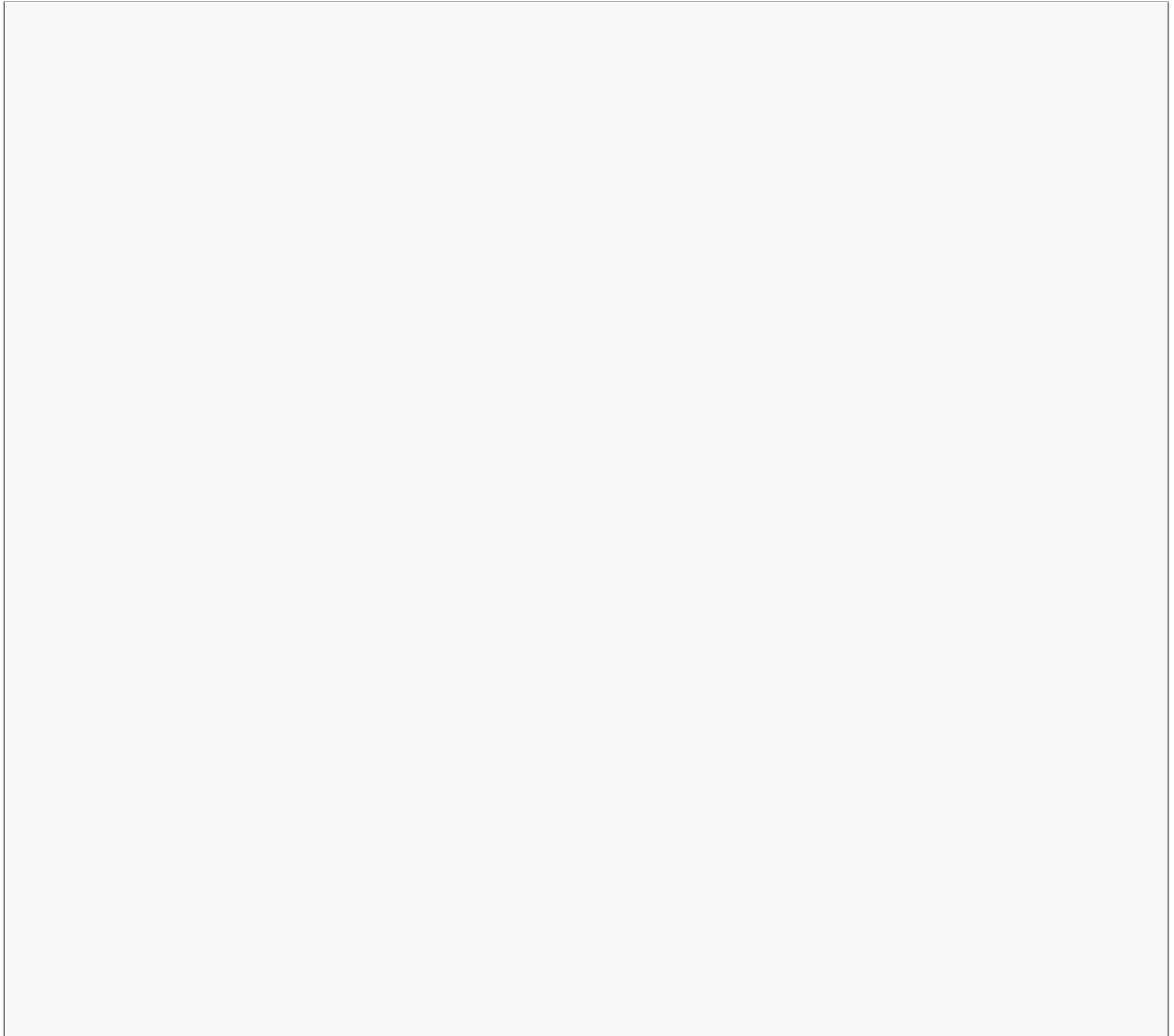
Gegeben seien zwei DNA-Stränge D_1, D_2 auf verschiedenen Rechnern. Die beiden Rechner dürfen bei Ausführung des Algorithmus nur 1 Bit untereinander austauschen. Auf beiden Rechnern kann derselbe Pseudozufallsgenerator mit demselben Seed gestartet werden.

Geben Sie ein randomisiertes Vorgehen an, welches entscheidet, ob (D_1, D_2) ein Doppelstrang ist. Bei Eingabe einer Ja-Instanz soll immer korrekt entschieden werden; sonst soll eine konstante Fehlerwahrscheinlichkeit < 1 garantiert werden.

(c) Analyse

(6 Punkte)

Welche Fehlerwahrscheinlichkeit hat Ihr Vorgehen bei Nein-Instanzen? Beweisen Sie.



Weiterer Platz für Aufgabe 7(b):



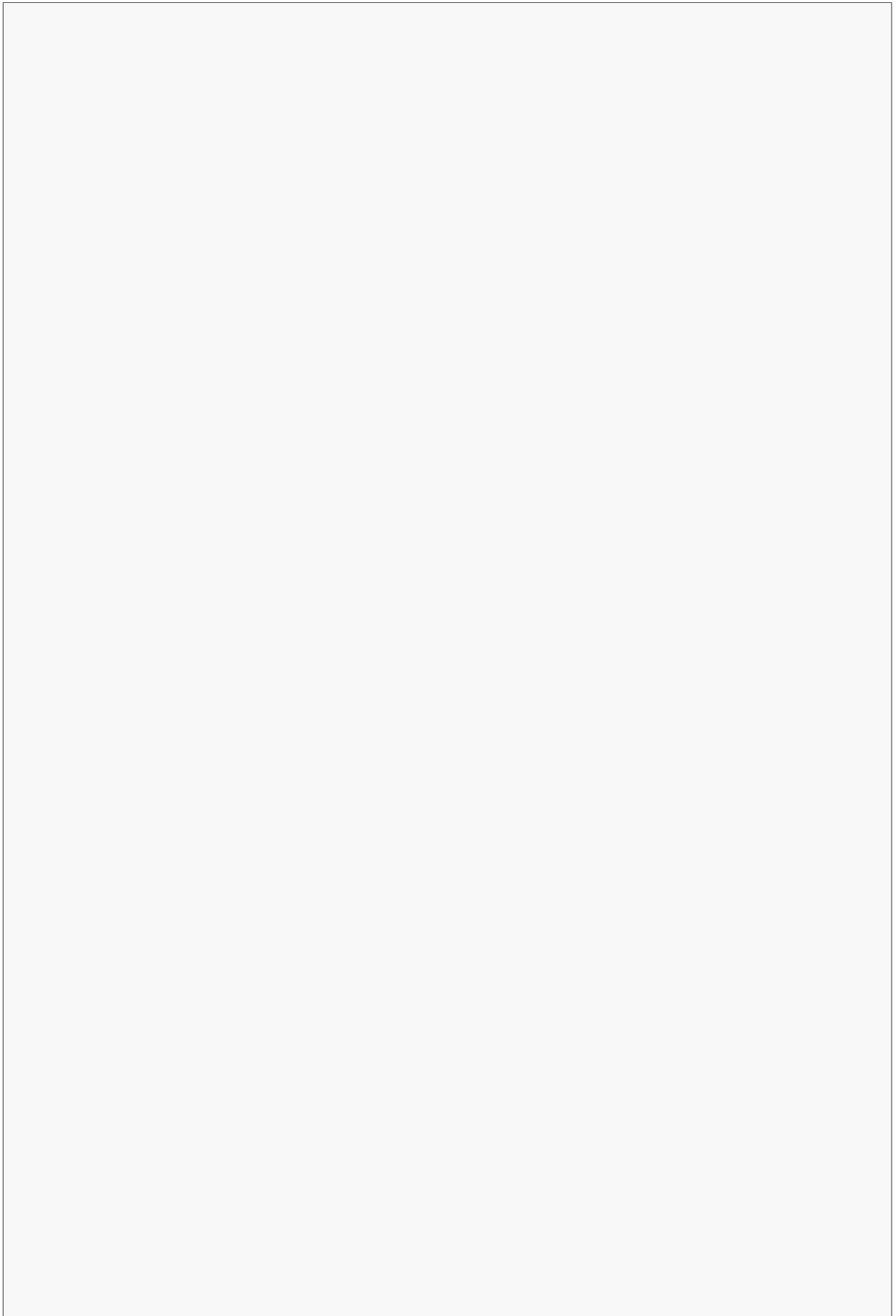
Aufgabe 9: NP-Vollständigkeit

(20 Punkte)

(a) Definition

(8 Punkte)

Definieren Sie **NP**-Vollständigkeit, ohne den Begriff „**NP**-schwer“ zu benutzen. Definieren Sie auch den Begriff der Reduktion. Sie können davon ausgehen, dass **NP** definiert ist.



(b) **Reduktion**

(12 Punkte)

Ein Sportclub bietet seinen Mitgliedern an, in mehreren Teams mitzuspielen. Der Clubvorstand wünscht sich eine regelmäßige Clubversammlung von Mitgliedern, sodass aus jedem Team mindestens ein Sportler anwesend ist.

CLUBVERSAMMLUNG

Gegeben: Eine Menge von Mitgliedern \mathcal{M} ; verschiedene Teams T_1, \dots, T_t mit $\bigcup_{i=1}^t T_i = \mathcal{M}$; eine maximale Größe der Versammlung $c \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Gibt es eine Clubversammlung $C \subseteq \mathcal{M}$ mit höchstens c Mitgliedern, sodass aus jedem Team mindestens ein Mitglied in C vertreten ist?

Zeigen Sie, dass CLUBVERSAMMLUNG **NP**-schwer ist. Definieren Sie dafür auch das bei Ihrer Reduktion verwendete Problem.

Notizen:

Notizen: