

Einführung in die Theoretische Informatik  
**Klausur — SoSe 2023 — 17. Juli 2023**

Haupttermin, Prüfungsnr. 1007049

Gruppe: Eris/Harmonia

**Unbedingt ausfüllen**

|  |  |  |
|--|--|--|
| Matrikelnummer                           | Studiengang/Abschluss  | Fachsemester                             |
| <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/>   | <input style="width: 95%;" type="text"/> |
| Nachname                                 | Vorname  |  |
| <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/>   |  |
| Unterschrift                             | Identifikator <small>(Beliebiges Wort zur Identifikation im anonymen Notenaushang)</small> |  |
| <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/>   |  |

**Grundregeln**

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Sie schreiben diese Klausur **vorbehaltlich** der Erfüllung der **Zulassungsvoraussetzung**. Das heißt: Wir werden Ihre Zulassung vor Korrektur prüfen; die Tatsache, dass Sie die Klausur mitschreiben, bedeutet keine implizite Zulassung.
- Es sind **keine Unterlagen** und auch **keine** anderen **Hilfsmittel** erlaubt.
- Benutzen Sie nur dokumentenechten (blauen oder zur Not schwarzen) **Kugelschreiber!** Bleistiftlösungen werden nicht gewertet!
- Es zählt die Antwort, die sich im dafür vorgesehenen Kästchen befindet! Soll eine andere Antwort gewertet werden, so ist diese **eindeutig** zu kennzeichnen!
- Jegliches Schummeln, und auch der Versuch desselben, führt zum Ausschluss von der Klausur und einer Bewertung mit **5,0**.

**Wird vom Korrektor/Prüfer ausgefüllt**

|                   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Aufgabe           | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | Σ  |
| Punkte (max)      | 8  | 8  | 12                                       | 8  | 18                                       | 8  | 10                                       | <b>72</b>                                |
| Punkte (erreicht) | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> | <input style="width: 95%;" type="text"/> |

|               |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>Punkte</b> | 0.. 35     | 36..37     | 38..39     | 40..41     | 42..44     | 45..47     | 48..50     | 51..53     | 54..57     | 58..60     | 61..72     |
| <b>Note</b>   | <b>5,0</b> | <b>4,0</b> | <b>3,7</b> | <b>3,3</b> | <b>3,0</b> | <b>2,7</b> | <b>2,3</b> | <b>2,0</b> | <b>1,7</b> | <b>1,3</b> | <b>1,0</b> |

Note:

**Aufgabe 1: Information****(8 Punkte)****(a) Definition****(2 Punkte)**

Sei  $(\Sigma, p)$  eine Informationsquelle; für  $\sigma \in \Sigma$  sei  $p_\sigma$  die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Geben Sie die Definition von  $H_{\Sigma, p}$  an, ohne  $\mathcal{I}(p)$  zu verwenden.

**(b) Quellencodierungstheorem****(6 Punkte)**

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet mit  $n \geq 2$  Symbolen. Ein  $\Sigma$ -Mini-NDEA ist ein nichtdeterministischer endlicher Automat über  $\Sigma$  ohne Selbstschleifen, mit genau zwei Zuständen: ein nicht-akzeptierender Startzustand und ein (nicht notwendigerweise erreichbarer) Endzustand.

Sei  $\mathcal{A} := \{A \mid A \text{ ist ein } \Sigma\text{-Mini-NDEA}\}$  die Menge aller  $\Sigma$ -Mini-NDEAs.

Wir betrachten eine Quelle, bei der jedes Element aus  $\mathcal{A}$  gleich wahrscheinlich ist. Berechnen Sie die Entropie dieser Quelle. Kürzen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

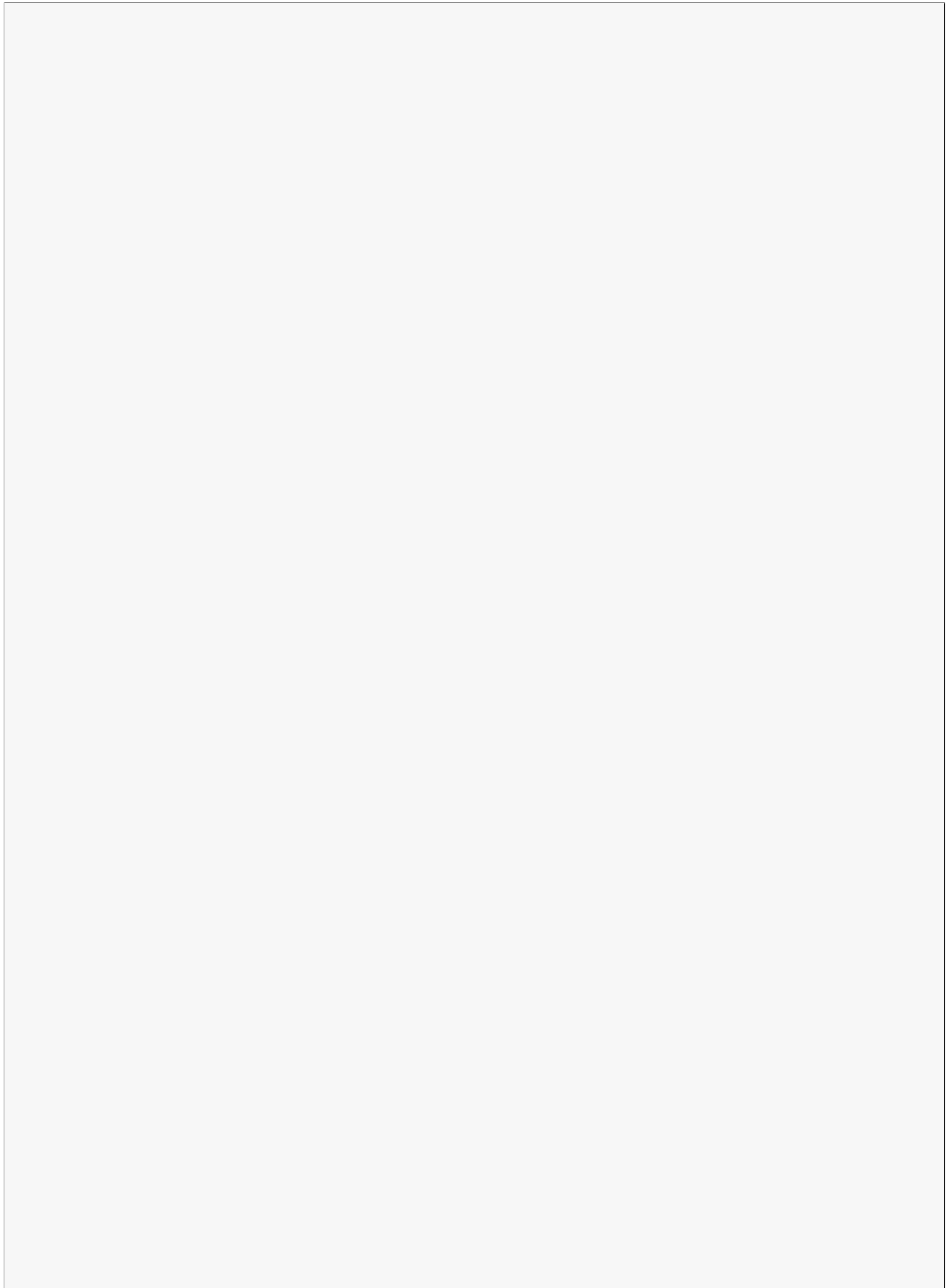
*Hinweis:* Denken Sie über  $|\mathcal{A}|$  nach.

**Aufgabe 2: Umwandlung RegEx → NDEA**

**(8 Punkte)**

Wandeln Sie den folgenden regulären Ausdruck – gemäß dem Vorgehen aus der Vorlesung – in einen nichtdeterministischen endlichen Automaten um.

$$(bab)^*|a(a^+|c)$$



### Aufgabe 3: Pumping Lemma

(12 Punkte)

(a) **Definition**

(4 Punkte)

Wie lautet das Pumping Lemma für reguläre Sprachen?

Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann...

...  $z = uvw$  mit den Eigenschaften

(1) , (2)  und (3) .

(b) **Anwendung**

(8 Punkte)

Beweisen Sie, dass  $L := \{b^i a^j c^k \mid j > k, i = (j + k) \bmod 3\}$  nicht regulär ist.

#### Aufgabe 4: Turing-Vollständigkeit

(8 Punkte)

Eine *modulierende Turingmaschine* unterscheidet sich von einer klassischen Turingmaschine nur in ihrem Bandalphabet  $\Gamma_0 = \{0, 1, 2\}$  (wobei 0 die Rolle von  $\square$  übernimmt) und ihren Übergangsbeschriftungen. Ein Übergang ist beschriftet durch ein Tupel  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \Gamma_0^3$ : Wenn  $\sigma_1$  gelesen wird, wird  $\sigma_2$  geschrieben; anschließend bewegt sich der Schreib-Lese-Kopf nach links falls  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \bmod 2 = 0$ , sonst nach rechts.

Zeigen Sie, dass *modulierende Turingmaschinen* mindestens so mächtig sind wie klassische Turingmaschinen mit  $\Gamma = \{\square, 1, 2\}$ .

**Aufgabe 5: NP-Vollständigkeit**

**(18 Punkte)**

**(a) Definitionen und Eigenschaften**

**(6 Punkte)**

**Aufgabe:** Vervollständigen Sie.

Eine Reduktion von  $\mathcal{X}$  auf  $\mathcal{Y}$  ist eine  Funktion  $f$ , die eine beliebige -Instanz  $I$  in eine -Instanz  $f(I)$  verwandelt, sodass gilt:  $I$  ist eine -Instanz   $f(I)$  ist eine -Instanz.

Ein Problem  $\mathcal{A}$  ist **NP**-schwer, wenn gilt: für   $\mathcal{B} \in$   existiert eine  Reduktion von  auf .

Ein Problem  $\mathcal{Q}$  ist **NP**-vollständig, wenn gilt:  und .

**(b) Reduktion**

**(12 Punkte)**

Amy und Ryan möchten gemeinsam einen Filme-Marathon veranstalten. Dabei möchten Sie möglichst viele Minuten mit Arnold Schwarzenegger und möglichst wenige mit Sylvester Stallone sehen. Für jeden zur Auswahl stehenden Film  $f$  kennen sie die Anzahl  $x_f$  Minuten, in denen Arnold zu sehen ist und die Anzahl  $y_f$  Minuten, in denen Sylvester auftritt. Da die beiden große Fans sind, spielt der genaue Preis  $z_f$  für einen Film keine Rolle, aber aus Fairnessgründen möchten sie sich die Gesamtkosten exakt teilen können.

4EVERARNIE

**Gegeben:** Eine Menge  $F$  von Filmen, wobei ein Film  $f$  gegeben ist als Tripel  $(x_f, y_f, z_f) \in \mathbb{N}^3$  mit  $z_f \geq 1$ ; zwei natürliche Zahlen  $X, Y \in \mathbb{N}$ .

**Gefragt:** Gibt es eine Teilmenge  $F' \subseteq F$  sodass (i)  $\sum_{f \in F'} x_f \geq X$ , (ii)  $\sum_{f \in F'} y_f \leq Y$  und (iii)  $(\sum_{f \in F'} z_f) \bmod 2 = 0$ ?

Zeigen Sie, dass 4EVERARNIE **NP**-schwer ist. Das in Ihrer Reduktion verwendete Ausgangsproblem  $\mathcal{X}$  muss aus der Vorlesung stammen.

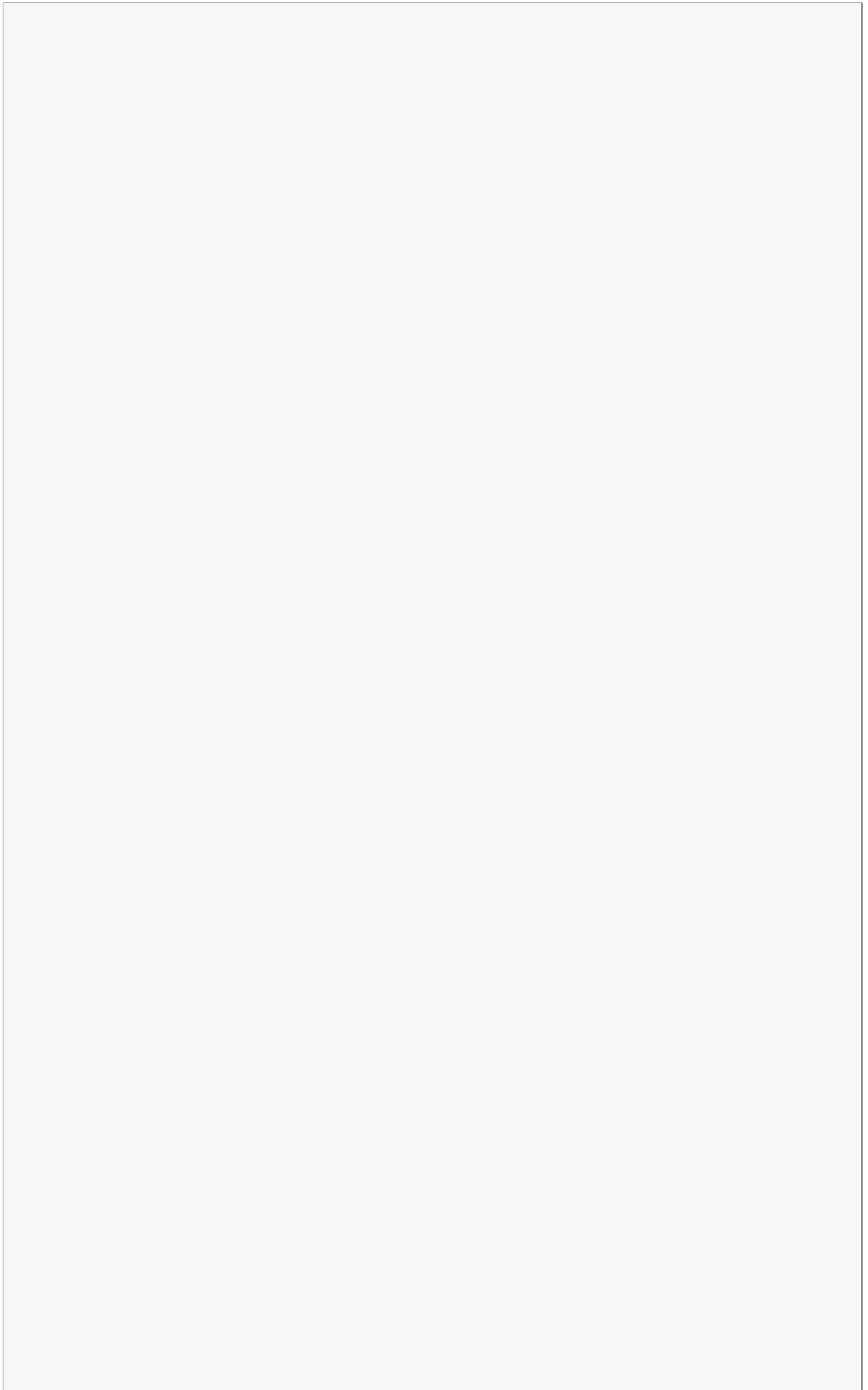
Definieren Sie das bei Ihrer Reduktion verwendete Problem  $\mathcal{X}$ :

**Name:**

**Gegeben:**

**Gefragt:**

Reduktionsbeweis:



## Aufgabe 6: Fixed Parameter Tractibility

(8 Punkte)

### (a) Definition

(4 Punkte)

Wie lautet die Definition von *FPT*?

Ein Entscheidungsproblem liegt in *FPT* in Bezug auf Parameter  $k$ , wenn es sich in Zeit  $\left\{ \square \mathcal{O}(n^c \cdot h(k)) \quad \square \mathcal{O}(n^k \cdot h(c)) \quad \square \mathcal{O}(2^c \cdot h(n)) \quad \square \mathcal{O}(c^k \cdot h(n)) \right\}$  lösen lässt.

Dabei ist  $h \left\{ \square \text{exponentiell}, \square \text{polynomiell}, \square \text{berechenbar}, \square \text{beliebig} \right\}$  und  $c \in \mathbb{N}$  konstant.

### (b) Komplexität

(4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende parametrisierte Version von BINPACKING.

para-BINPACKING

**Parameter:** Behälteranzahl  $k \in \mathbb{N}$ .

**Gegeben:** Eine Menge von natürlichen Zahlen  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , eine Behältergröße  $b \in \mathbb{N}$ .

**Gefragt:** Existiert eine Aufteilung von  $A$  in  $k$  disjunkte Teilmengen  $B_1, \dots, B_k$ , so dass  $\sum_{a \in B_i} a \leq b$  für alle  $1 \leq i \leq k$ ?

Zeigen Sie: Wenn  $P \neq NP$ , dann liegt para-BINPACKING nicht in *FPT* bzgl.  $k$ .

*Hinweis:* Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass wir eine beliebige PARTITION-Instanz  $A$  in Polynomialzeit in eine äquivalente BINPACKING-Instanz  $(A, b = \sum_{a \in A} a/2, k = 2)$  transformieren können.



## Aufgabe 7: Randomisierte Algorithmen

(10 Punkte)

(a) **Definition**

(4 Punkte)

Definieren Sie  $ZPP(MC)$ .

(b) **Algorithmus**

(6 Punkte)

Der Pfandautomat in der Mensa verhält sich oft merkwürdig. Schon im Normalfall akzeptiert er Glasflaschen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  und Plastikflaschen mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/3$ . Ist er *defekt*, akzeptiert er weder Glas- noch Plastikflaschen.

Geben Sie einen **CO-RP**-Algorithmus an, der in möglichst kurzer Zeit mit mindestens 99%-iger Sicherheit die Frage „Ist der Automat defekt?“ entscheidet. Zeigen Sie, dass die nötigen Eigenschaften erfüllt werden.

*Hinweis:* Sie dürfen annehmen, dass ein einzelner Flascheneinwurf in konstanter Zeit vom Automat verarbeitet wird.

Algorithmus **und** Analyse:

*Fortsetzung Aufgabe 7:*

*Notizen:*