Universität Osnabrück / FB6 / Theoretische Informatik — Prof. Dr. M. Chimani

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur — SoSe 2023 — 17. Juli 2023

Haupttermin, Prüfungsnr. 1007049 — Gruppe: Discordia/Concordia

Unbedingt ausfüllen

Matrikelnummer

Studiengang/Abschluss

Fachsemester

Nachname

Vorname

Unterschrift

Identifikator (Beliebiges Wort zur Identifikation im anonymen Notenaushang)

Grundregeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Sie schreiben diese Klausur **vorbehaltlich** der Erfüllung der **Zulassungsvoraussetzung**. Das heißt: Wir werden Ihre Zulassung vor Korrektur prüfen; die Tatsache, dass Sie die Klausur mitschreiben, bedeutet keine implizite Zulassung.
- Es sind **keine Unterlagen** und auch **keine** anderen **Hilfsmittel** erlaubt.
- Benutzen Sie nur dokumentenechten (blauen oder zur Not schwarzen) **Kugelschreiber**! Bleistiftlösungen werden nicht gewertet!
- Es zählt die Antwort, die sich im dafür vorgesehenen Kästchen befindet! Soll eine andere Antwort gewertet werden, so ist diese **eindeutig** zu kennzeichnen!
- Jegliches Schummeln, und auch der Versuch desselben, führt zum Ausschluss von der Klausur und einer Bewertung mit **5,0**.

Wird vom Korrektor/Prüfer ausgefüllt

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte (max)	8	8	12	8	18	8	10	**72**
Punkte (erreicht)								

Punkte	0.. 35	36..37	38..39	40..41	42..44	45..47	48..50	51..53	54..57	58..60	61..72
Note	**5,0**	**4,0**	**3,7**	**3,3**	**3,0**	**2,7**	**2,3**	**2,0**	**1,7**	**1,3**	**1,0**

Note:

Aufgabe 1: Information **(8 Punkte)**

(a) Definition (2 Punkte)

Sei (Σ, p) eine Informationsquelle; für $\sigma \in \Sigma$ sei p_σ die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Geben Sie die Definition von $\mathrm{H}_{\Sigma,p}$ an, ohne $\mathcal{I}(p)$ zu verwenden.

(b) Quellencodierungstheorem (6 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet mit $n \geq 2$ Symbolen. Ein Σ-Mini-NDEA ist ein nichtdeterministischer endlicher Automat über Σ ohne Selbstschleifen, mit genau zwei Zuständen: ein nicht-akzeptierender Startzustand und ein (nicht notwendigerweise erreichbarer) Endzustand.

Sei $\mathcal{A} := \{A \mid A \text{ ist ein } \Sigma\text{-Mini-NDEA}\}$ die Menge aller Σ-Mini-NDEAs.

Wir betrachten eine Quelle, bei der jedes Element aus $\mathcal{A}$ gleich wahrscheinlich ist. Berechnen Sie die Entropie dieser Quelle. Kürzen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

Hinweis: Denken Sie über $|\mathcal{A}|$ nach.

Aufgabe 2: Umwandlung RegEx → NDEA **(8 Punkte)**

Wandeln Sie den folgenden regulären Ausdruck – gemäß dem Vorgehen aus der Vorlesung – in einen nichtdeterministischen endlichen Automaten um.

$$(b|c^+)a|(aba)^*$$

Aufgabe 3: Pumping Lemma **(12 Punkte)**

(a) Definition (4 Punkte)

Wie lautet das Pumping Lemma für reguläre Sprachen?

Sei L eine reguläre Sprache. Dann...

... $z = uvw$ mit den Eigenschaften

(1) , (2) und (3) .

(b) Anwendung (8 Punkte)

Beweisen Sie, dass $L := \{c^x b^y a^z \mid y > z,\ x = (y + z) \bmod 3\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 4: Turing-Vollständigkeit **(8 Punkte)**

Eine *modulierende Turingmaschine* unterscheidet sich von einer klassischen Turingmaschine nur in ihrem Bandalphabet $\Gamma_0 = \{0, 1, 2\}$ (wobei 0 die Rolle von $\square$ übernimmt) und ihren Übergangsbeschriftungen. Ein Übergang ist beschriftet durch ein Tupel $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in {\Gamma_0}^3$: Wenn σ_1 gelesen wird, wird σ_2 geschrieben; anschließend bewegt sich der Schreib-Lese-Kopf nach links falls $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \bmod 2 = 1$, sonst nach rechts.

Zeigen Sie, dass *modulierende Turingmaschinen* mindestens so mächtig sind wie klassische Turingmaschinen mit $\Gamma = \{\square, 1, 2\}$.

Aufgabe 5: *NP*-Vollständigkeit **(18 Punkte)**

(a) Definitionen und Eigenschaften (6 Punkte)

Aufgabe: Vervollständigen Sie.

Eine Reduktion von $\mathcal{X}$ auf $\mathcal{Y}$ ist eine ______ Funktion f, die eine beliebige ______-Instanz I in eine ______-Instanz $f(I)$ verwandelt, sodass gilt: I ist eine ______-Instanz ______ $f(I)$ ist eine ______-Instanz.

Ein Problem $\mathcal{A}$ ist *NP*-schwer, wenn gilt: für ______ $\mathcal{B} \in$ ______ existiert eine ______ Reduktion von ______ auf ______.

Ein Problem $\mathcal{Q}$ ist *NP*-vollständig, wenn gilt:
______ und ______.

(b) Reduktion (12 Punkte)

Abigail und Ross möchten gemeinsam einen Filme-Marathon veranstalten. Dabei möchten Sie möglichst viele Szenen mit Arnold Schwarzenegger und möglichst wenige mit Sylvester Stallone sehen. Für jeden zur Auswahl stehenden Film f kennen sie die Anzahl ℓ_f Szenen, in denen Arnold zu sehen ist und die Anzahl m_f Szenen, in denen Sylvester auftritt. Da die beiden große Fans sind, spielt der genaue Preis k_f für einen Film keine Rolle, aber aus Fairnessgründen möchten sie sich die Gesamtkosten exakt teilen können.

Arnie4Ever

Gegeben: Eine Menge F von Filmen, wobei ein Film f gegeben ist als Tripel $(k_f, \ell_f, m_f) \in \mathbb{N}^3$ mit $k_f \geq 1$; zwei natürliche Zahlen $L, M \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Gibt es eine Teilmenge $F' \subseteq F$ sodass (i) $\sum_{f \in F'} \ell_f \geq L$, (ii) $\sum_{f \in F'} m_f \leq M$ und (iii) $\left(\sum_{f \in F'} k_f\right) \bmod 2 = 0$?

Zeigen Sie, dass Arnie4Ever *NP*-schwer ist. Das in Ihrer Reduktion verwendete Ausgangsproblem $\mathcal{X}$ muss aus der Vorlesung stammen.

Definieren Sie das bei Ihrer Reduktion verwendete Problem $\mathcal{X}$:

Name:

Gegeben:

Gefragt:

Reduktionsbeweis:

Aufgabe 6: Fixed Parameter Tractibility (8 Punkte)

(a) Definition (4 Punkte)

Wie lautet die Definition von ***FPT***?

Ein Entscheidungsproblem liegt in ***FPT*** in Bezug auf Parameter ℓ, wenn es sich in Zeit

$\left\{ \square\ \mathcal{O}\big(g(n)\cdot 2^c\big) \quad \square\ \mathcal{O}\big(g(n)\cdot c^\ell\big) \quad \square\ \mathcal{O}\big(g(\ell)\cdot n^c\big) \quad \square\ \mathcal{O}\big(g(c)\cdot n^\ell\big) \right\}$ lösen lässt.

Dabei ist g $\left\{ \square \right.$ berechenbar, $\square$ exponentiell, $\square$ polynomiell, $\left.\square \text{ beliebig}\right\}$
und $c \in \mathbb{N}$ konstant.

(b) Komplexität (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende parametrisierte Version von BinPacking.

para-BinPacking

Parameter: Behälteranzahl $\ell \in \mathbb{N}$.

Gegeben: Eine Menge von natürlichen Zahlen $A = \{a_1, ..., a_n\}$, eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Existiert eine Aufteilung von A in ℓ disjunkte Teilmengen $B_1, ..., B_\ell$, sodass $\sum_{a\in B_i} a \le b$ für alle $1 \le i \le \ell$?

Zeigen Sie: Wenn ***P*** $\neq$ ***NP***, dann liegt para-BinPacking <u>nicht</u> in ***FPT*** bzgl. ℓ.

Hinweis: Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass wir eine beliebige Partition-Instanz A in Polynomialzeit in eine äquivalente BinPacking-Instanz $(A, b = \sum_{a\in A} a/2, \ell = 2)$ transformieren können.

Aufgabe 7: Randomisierte Algorithmen **(10 Punkte)**

(a) Definition (4 Punkte)

Definieren Sie *ZPP(LV)*.

(b) Algorithmus (6 Punkte)

Der Pfandautomat in der Mensa verhält sich oft merkwürdig. Schon im Normalfall akzeptiert er Glasflaschen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 und Plastikflaschen mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2. Ist er *defekt*, akzeptiert er weder Glas- noch Plastikflaschen.

Geben Sie einen ***Co-RP***-Algorithmus an, der in möglichst kurzer Zeit mit mindestens 99%-iger Sicherheit die Frage „Ist der Automat defekt?“ entscheidet. Zeigen Sie, dass die nötigen Eigenschaften erfüllt werden.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass ein einzelner Flascheneinwurf in konstanter Zeit vom Automat verarbeitet wird.

Algorithmus **und** Analyse:

Fortsetzung Aufgabe 7:

Notizen:

Viel Erfolg!