

Informatik D: Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur — SoSe 2014 — 30. Juli 2014

Haupttermin, Prüfungsnr. 1007049

Gruppe: Reis (Risotto, Nasi-Goreng)

Unbedingt ausfüllen

Matrikelnummer	Studiengang/Abschluss	Fachsemester
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Nachname	Vorname	
<input type="text"/>	<input type="text"/>	
Unterschrift	Identifikator <small>(Beliebiges Wort zur Identifikation im anonymen Notenaushang)</small>	
<input type="text"/>	<input type="text"/>	

Grundregeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Sie schreiben diese Klausur **vorbehaltlich** der Erfüllung der **Zulassungsvoraussetzung**. Das heißt: Wir werden Ihre Zulassung vor Korrektur prüfen; die Tatsache, dass Sie die Klausur mitschreiben, bedeutet keine implizite Zulassung.
- Es sind **keine Unterlagen** und auch **keine** anderen **Hilfsmittel** erlaubt.
- Benutzen sie nur dokumentenechten (blauen oder zur Not schwarzen) **Kugelschreiber!** Bleistiftlösungen werden nicht gewertet!
- Es zählt die Antwort, die sich im dafür vorgesehenen Kästchen befindet! Soll eine andere Antwort gewertet werden, so ist diese **eindeutig** zu kennzeichnen!
- Jegliches Schummeln, und auch der Versuch desselben, führt zum Ausschluss von der Klausur und einer Bewertung mit **5,0**.

Wird vom Korrektor/Prüfer ausgefüllt

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte (max)	12	12	16	12	10	12	12	12	20	12	130
Punkte (erreicht)											

Punkte	0..64	65..72	73..79	80..84	85..89	90..95	96..100	101..105	106..110	111..117	118..130
Note	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Note:

Aufgabe 1: Sprache vs. Grammatik**(12 Punkte)****(a) Hierarchie und Automaten****(10 Punkte)**

Zu jeder Sprache gibt es entsprechende Automaten. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Chomsky-Typ	Name der Sprachfamilie	Automaten
0		
		NLBA
	regulär	

(b) Grammatikdefinition**(2 Punkte)**

Definieren Sie kontextfreie Grammatiken (für Sprachen L mit $\varepsilon \notin L$).

Alle Regeln haben die Form...

Aufgabe 2: Sprachen**(12 Punkte)**

Welche Aussagen stimmen?

(Achtung: Pro Frage gibt es +2/0/-2 Punkte bei einer richtigen/keinen/falschen Antwort! Sie erhalten jedoch natürlich mindestens 0 Punkte für die gesamte Aufgabe.)

korrekt falsch

-
- Die Sprache $\{0^k 1^\ell 2^k 22^\ell \mid k, \ell \geq 0\}$ ist kontextfrei.
 - Nicht-deterministische Kellerautomaten, die maximal ein Symbol im Keller speichern können, sind nur so mächtig wie deterministische endliche Automaten.
 - Man kann jeden deterministischen Kellerautomat in einen nicht-deterministischen Kellerautomaten umformen, dessen Keller immer maximal 2 Elemente enthält.
 - Es gibt endliche Mengen die nicht das Alphabet einer Sprache sein können.
 - Das Alphabet einer Sprache kann unendlich groß sein.
 - Σ^* ist die Potenzmenge von Σ .

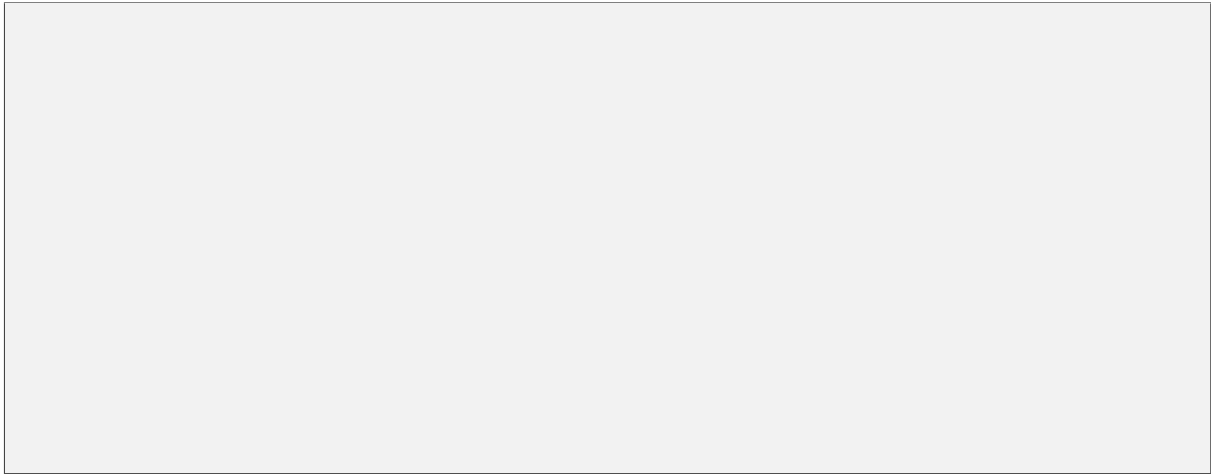
Aufgabe 3: Pumping Lemma

(16 Punkte)

(a) **Definition**

(4 Punkte)

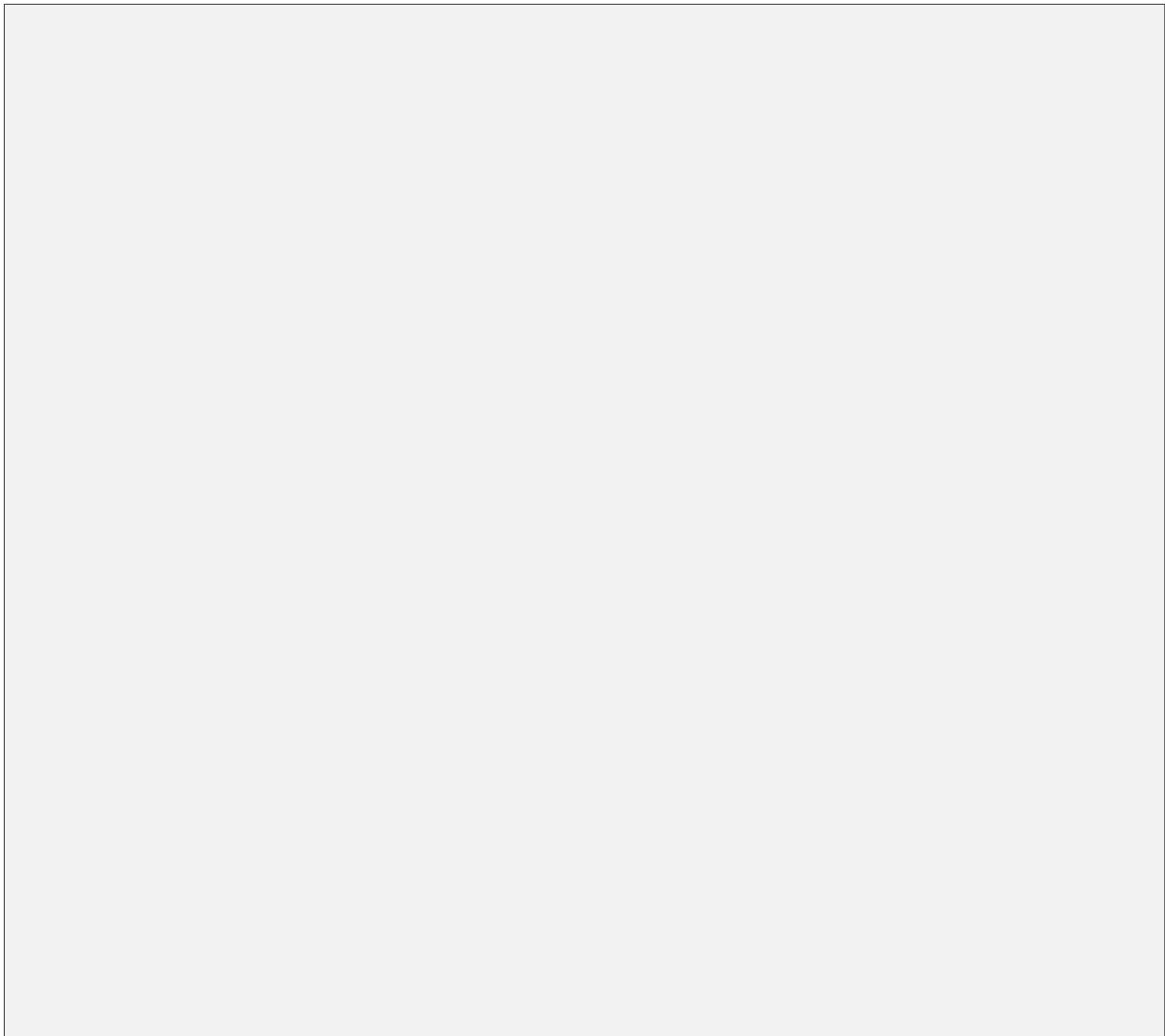
Wie lautet das Pumping Lemma für reguläre Sprachen?



(b) **Anwendung**

(12 Punkte)

Beweisen Sie, dass $\{c^j a^i c a^{3i} c \mid i, j \geq 0\}$ keine reguläre Sprache ist.



Aufgabe 4: RegEx vs. DEA**(12 Punkte)**

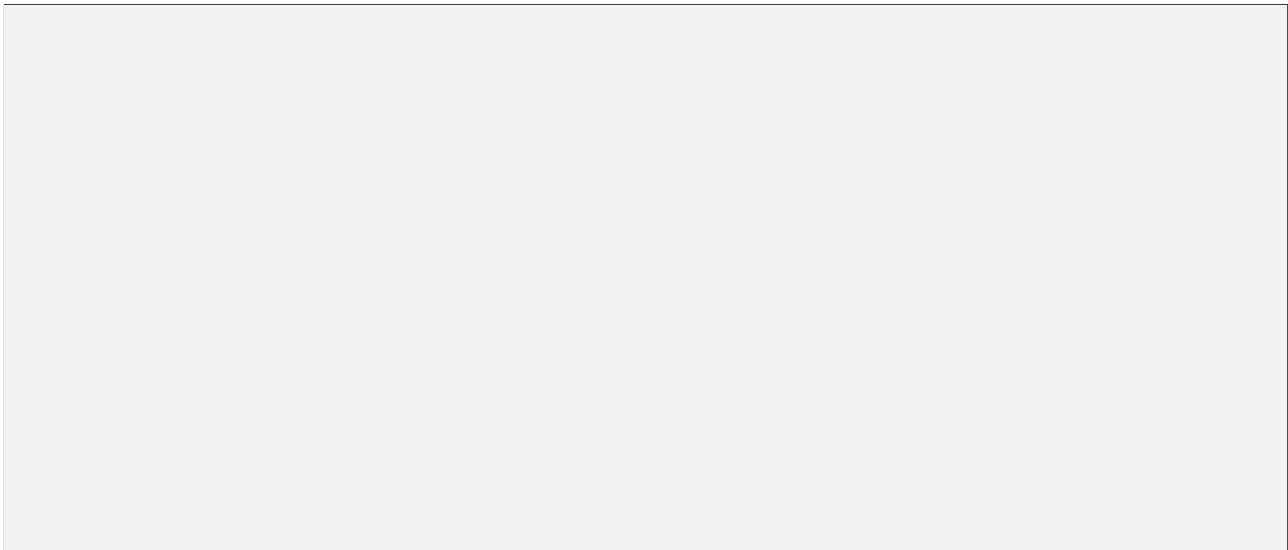
Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der dem folgenden regulären Ausdruck entspricht:

$$(\emptyset^*|23^*2|2^*)1$$

(Es gibt genug Platz, damit Sie Zwischenschritte aufschreiben können. Markieren Sie Ihr Endergebnis bitte entsprechend.)

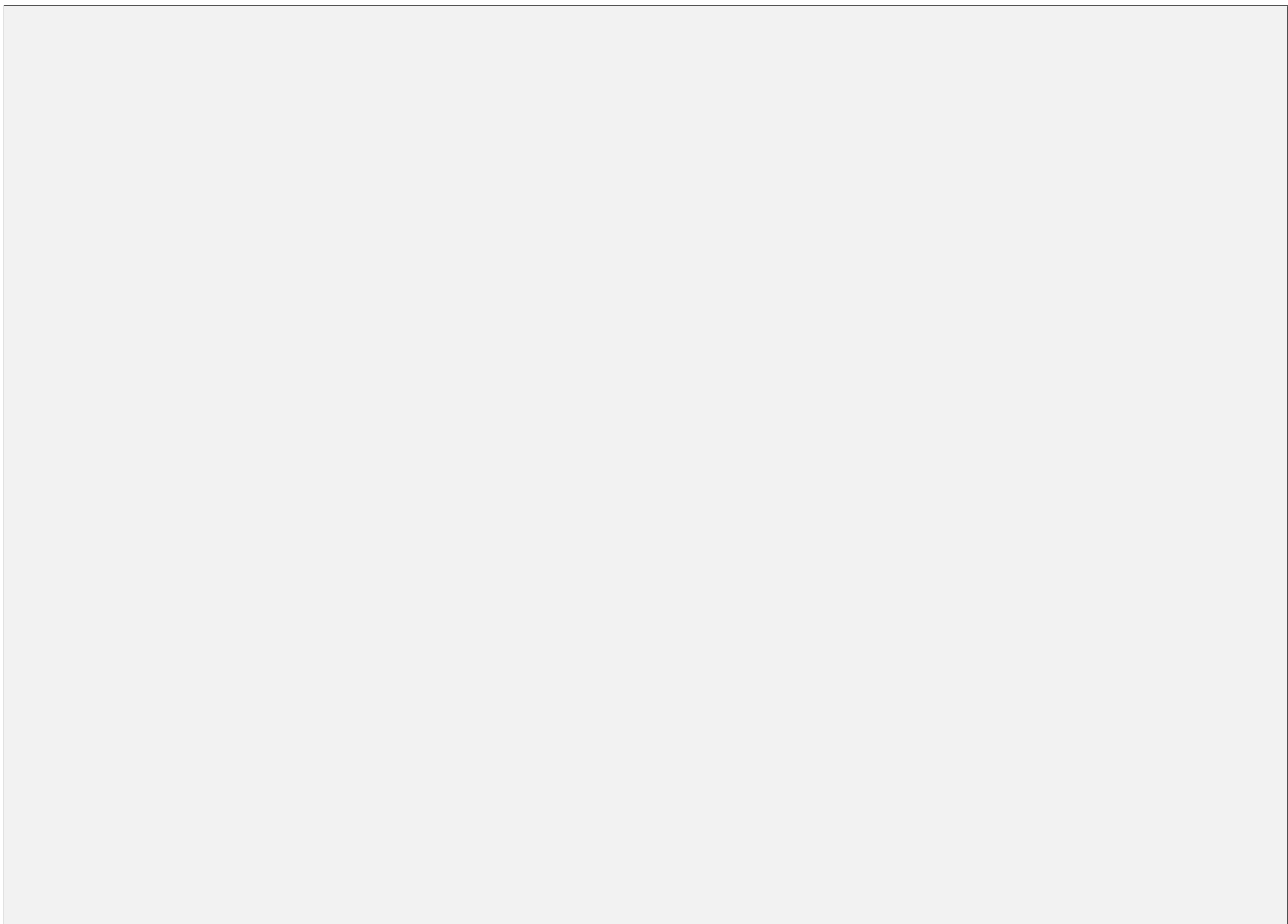
Aufgabe 5: Kellerautomat**(10 Punkte)**

Geben Sie für die Sprache $\{a^j cb^{j-i} cd^i \mid j \geq i \geq 0\}$ einen Kellerautomaten an, der durch leeren Keller akzeptiert.

**Aufgabe 6: Rechnende Turingmaschine****(12 Punkte)**

Gegeben eine binär kodierte Zahl α . Geben Sie eine Turingmaschine an, die die folgende Funktion berechnet:

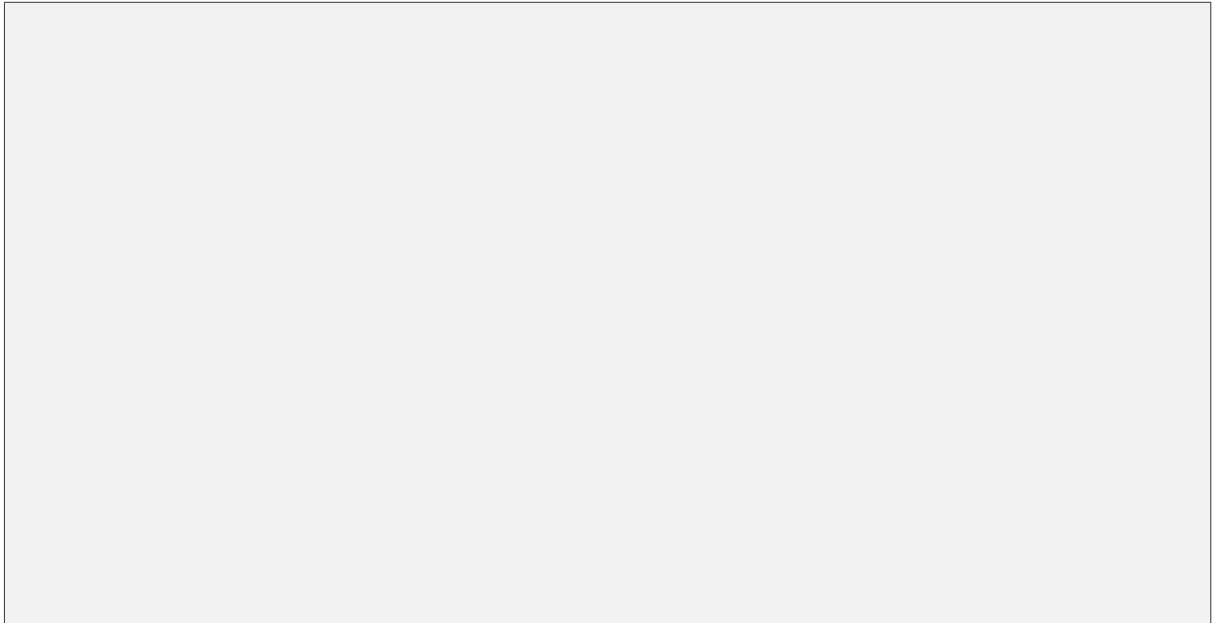
$$f(\alpha) := \begin{cases} \text{undef} & \alpha \in \mathbb{N}_g \cup \{0\} \\ \alpha - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



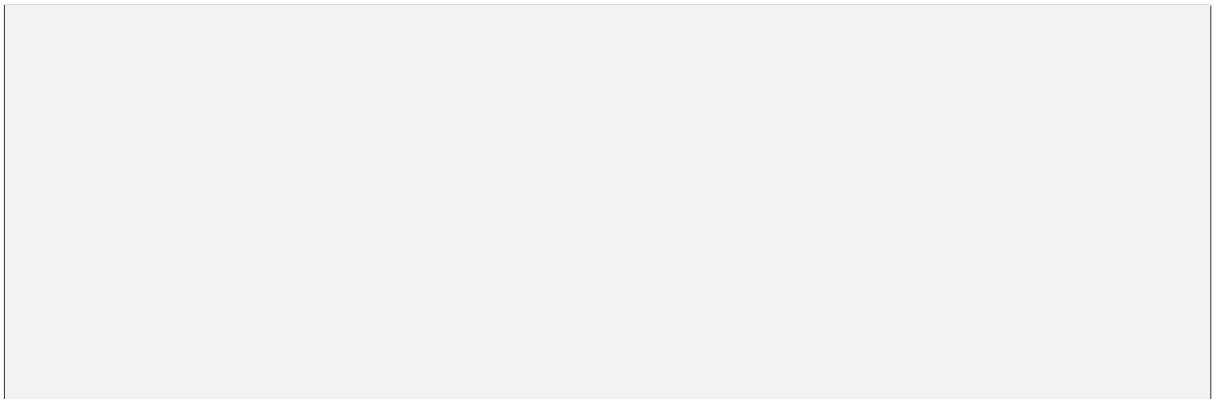
Aufgabe 7: LOOP-Berechenbarkeit**(12 Punkte)****(a) LOOP-Programm****(8 Punkte)**

Geben Sie ein LOOP-Programm an (eingeschränkte Definition, d.h. keine Addition von Variablen oder höhere Rechenoperationen), dass der folgenden Codezeile entspricht:

$$x_4 := 3 \cdot x_1 \cdot x_2$$

**(b) Turing-vollständig****(4 Punkte)**

Begründen Sie, warum LOOP-Programme nicht so mächtig wie Turingmaschinen sind.



Aufgabe 8: Entscheidbarkeit**(12 Punkte)**

Wir definieren das Ergebnis des *Klebeoperators* \circ als die Zahl, die durch das Hintereinanderschreiben der Dezimaldarstellungen ihrer einzelnen Argumente repräsentiert wird. Wir können mehrere Klebeoperationen gesammelt schreiben, z.B.

$$\bigcirc_{i=1}^4 i^2 = 1 \circ 4 \circ 9 \circ 16 = 14916.$$

Betrachten Sie das folgende Problem:

Gegeben: Drei jeweils k -elementige Mengen $\mathcal{A} := \{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$, $\mathcal{B} := \{b_i\}_{1 \leq i \leq k}$, $\mathcal{C} := \{c_i\}_{1 \leq i \leq k}$ mit Elementen aus \mathbb{N} .

Frage: Gibt es eine Sequenz $s(1), s(2), \dots, s(n)$ mit $n \geq 1$ und $s(i) \in \{1, \dots, k\}$ für alle $1 \leq i \leq n$, so dass

$$\bigcirc_{i=1}^n a_{s(i)} - \bigcirc_{i=1}^n b_{s(i)} = \bigcirc_{i=1}^n c_{s(i)}. \quad (\text{„Gleichung“})$$

(a) Beispiele**(4 Punkte)**

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Ja- und einer Nein-Instanz für dieses Problem an:

Ja-Instanz

Nein-Instanz

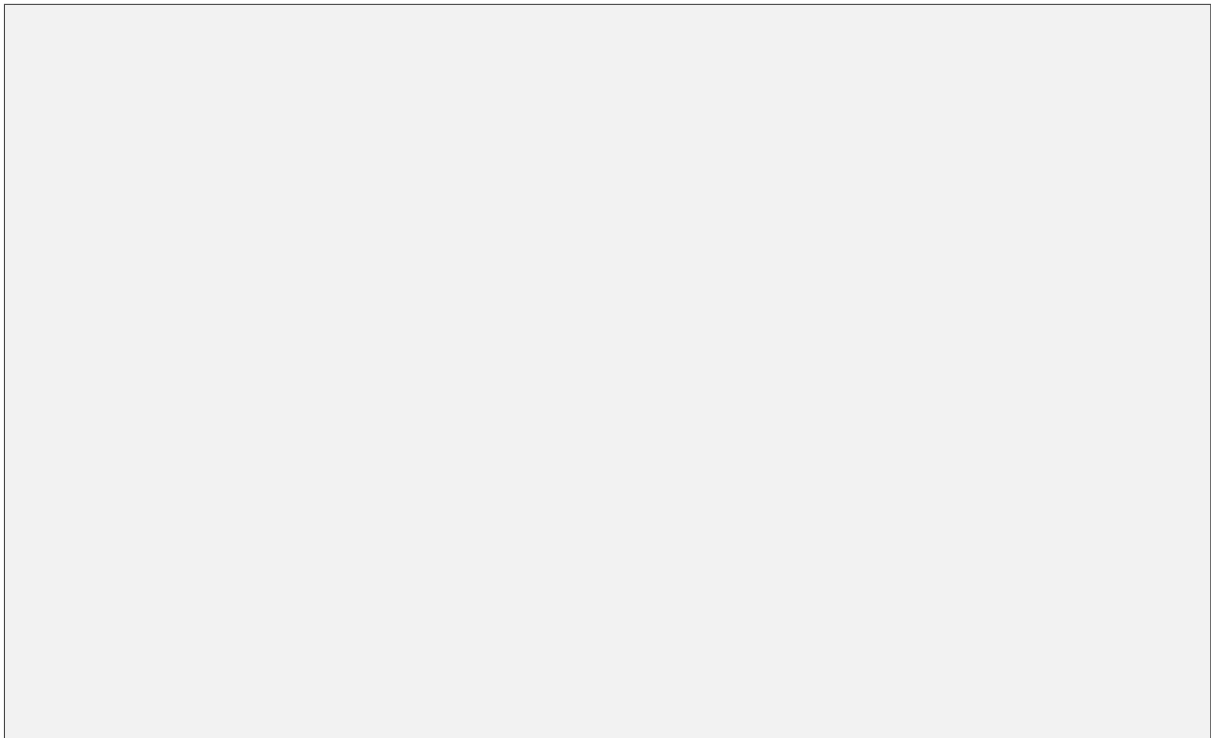
(b) Semi-Entscheidbarkeit**(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass das Problem semi-entscheidbar ist:

(c) **Unentscheidbarkeit**

(4 Punkte)

Beschreiben Sie kurz die notwendige Reduktion (von? nach? wie?) um zu begründen, warum das Problem nicht entscheidbar ist:



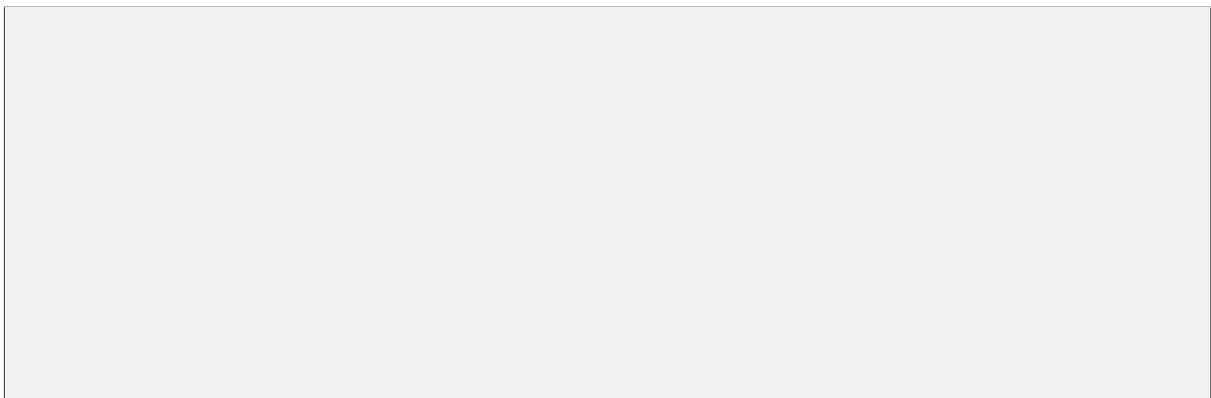
Aufgabe 9: P vs. NP

(20 Punkte)

(a) **Definition**

(4 Punkte)

Definieren Sie die Komplexitätsklasse P .



(b) **Basiszusammenhänge**

(10 Punkte)

Welche Aussagen stimmen?

(Achtung: Pro Frage gibt es +2/0/-2 Punkte bei einer richtigen/keinen/falschen Antwort! Sie erhalten jedoch natürlich mindestens 0 Punkte für die gesamte Aufgabe.)

korrekt	falsch	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Das Problem „Finde das kleinste Element aus n gegebenen Zahlen“ liegt in NP .
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Das Problem „Gegeben ein gewichteter Graph und eine Zahl W . Kann man einen aufspannenden Baum finden, dessen Gesamtgewicht maximal W ist?“ liegt in P .
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Das Problem „Gegeben ein Graph auf $n \geq 8$ Knoten. Kann man einen Hamiltonkreis finden, der maximal $n - 3$ Kanten enthält?“ ist NP -vollständig.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Wenn ein stark NP -vollständiges Problem einen pseudopolynomiellen Algorithmus erlaubt, gilt P = NP .
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Sei \mathcal{A} das zu einem Optimierungsproblem \mathcal{B} zugehörige Entscheidungsproblem. Wenn $\mathcal{A} \in \mathbf{P}$, gibt es einen deterministischen polynomiellen Algorithmus für \mathcal{B} .

(c) **Zeuge**

(6 Punkte)

Was versteht man, wenn man über **P** und **NP** spricht, unter einem Zeugen?

(Vollständige!) Definition:

Warum kann ein Zeuge nur polynomiell groß sein?

Aufgabe 10: NP-vollständig

(12 Punkte)

Sie kennen das Problem SAT, in dem eine Formel in konjunktiver Normalform gegeben ist, und jede Klausel *mindestens* ein Literal enthält. Sie kennen auch den Spezialfall des 3-SAT, in dem jede Klausel *maximal* drei Literale enthält. Wir definieren nun das folgende Problem:

Problem: EXAKT-5-SAT

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform mit *genau* fünf Literalen pro Klausel.

Frage: Ist F erfüllbar?

Um zu zeigen, dass EXAKT-5-SAT **NP**-vollständig ist, zeigt man im Normalfall, dass...

<input type="checkbox"/> ...es vollständig in P liegt	und	<input type="checkbox"/> in Co-NP liegt.
<input type="checkbox"/> ...es in P liegt		<input type="checkbox"/> nicht P -vollständig ist.
<input type="checkbox"/> ...es in NP liegt		<input type="checkbox"/> NP -schwer ist.
<input type="checkbox"/> ...es in NPI liegt		<input type="checkbox"/> nicht NP -schwer ist.
<hr/> <i>Punkt 1</i>		<hr/> <i>Punkt 2</i>

Punkt 1 ist trivial, daher beschränken wir uns auf Punkt 2. Dazu benötigen wir eine Reduktion

über das von dem zu dem Problem 3-SAT SAT PARTITION .

Geben Sie die notwendige Reduktion an, begründen Sie ihre notwendigen Eigenschaften und beweisen Sie, dass der korrekte *Punkt 2* gilt.