

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur, Haupttermin SoSe 2020, 20. Juli 2020 — Phase X

Aufgabe X1: Informationstheorie**(10 Punkte)**

Dateinamen: X1_nmuster-1, X1_nmuster-2, ...

(a) Präfix-Code**(4 Punkte)**

Betrachten Sie die nebenstehende Tabelle für die Quelle (Σ, p) .

Zeigen oder widerlegen Sie: Der gegebene Code \mathbb{C} ist ein (ternärer) Präfix-Code.

σ	a	b	c	d	e	f
p_σ	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{C}'(\sigma)$	002	010	100	02	01	2

(b) Entropie**(6 Punkte)**

Für $n \geq 1$ sei $\Sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ein Alphabet und $q(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit von a_i . Sei $q(a_0) = 2^{-n}$ und $q(a_j) = 2^{-j}$ für alle $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass die Entropie von (Σ, q) gegeben ist durch:

$$H_{\Sigma, q} = 2 - 2^{1-n}$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende Hilfsaussage ohne Beweis benutzen:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 2^{-i} = 2 - (n+2) \cdot 2^{-n}$$

Aufgabe X2: Umwandlung RegEx \rightarrow NDEA**(8 Punkte)**

Dateinamen: X2_nmuster-1, X2_nmuster-2, ...

Wandeln Sie den folgenden regulären Ausdruck – gemäß dem Vorgehen aus der Vorlesung – in einen nichtdeterministischen endlichen Automaten um.

$$(aa|b)^+ c|b^*a$$

Aufgabe X3: Randomisierte Algorithmen**(12 Punkte)**

Dateinamen: X3_nmuster-1, X3_nmuster-2, ...

Weil die Speisekarte erneuert werden soll, sollen alle Tiere eines Zoos ihre Lieblingsspeise wählen. Zur Auswahl steht eine Menge \mathcal{S} von Speisen. Jedes Tier darf als Antwort genau eine Speise wählen. Eine Speise, die von mindestens der Hälfte der Tiere gewählt wird, heißt *beliebt*.

Mit der Auswertung wurde ausgerechnet der Elefant Benjamin beauftragt, welcher für seine schlechte Gedächtnisleistung bekannt ist. Das bedeutet, dass er nur mit einer einzigen Zählvariable x (initial $x = 0$) arbeiten kann, und auf dieser nur die Operation $x := x + c$ (für $c \in \mathbb{N}$) ausführen kann. Außerdem kennt Benjamin die Anzahl $N \in \mathbb{N}$ aller Tiere.

Die Tiere flüstern Benjamin ihre Antwort einzeln und genau einmal zu. Er darf die Reihenfolge der Tiere frei wählen.

(a) RP-Algorithmus**(6 Punkte)**

Geben Sie einen **RP**-Algorithmus an, mit dem Benjamin entscheiden kann, ob es eine beliebte Speise gibt.

(b) Algorithmus analysieren**(6 Punkte)**

Zeigen Sie, welche Fehlerwahrscheinlichkeiten Ihr Algorithmus auf JA- und welche er auf NEIN-Instanzen hat.

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur, Haupttermin SoSe 2020, 20. Juli 2020 — Phase Y

Aufgabe Y1: Reguläre Sprachen

(4 Punkte)

Dateinamen: Y1_nmuster-1, Y1_nmuster-2, ...

Sei $\Sigma := \{a, b, c, d\}$. Die Sprache $L := \{ab^i cb^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

- (a) Geben Sie eine Sprache $L_a \subseteq \Sigma^*$ an, sodass $L'_a := L \cap L_a$ regulär ist. Sie müssen die Regularität von L'_a **nicht** beweisen.
- (b) Geben Sie eine Sprache $L_b \subseteq \Sigma^*$ an, sodass $L'_b := L \cup L_b$ regulär ist. Sie müssen die Regularität von L'_b **nicht** beweisen.

Aufgabe Y2: Pumping Lemma

(12 Punkte)

Dateinamen: Y2_nmuster-1, Y2_nmuster-2, ...

(a) Wortmindestlänge

(4 Punkte)

Wir betrachten die reguläre Sprache $A := \{\text{Finn, Tobias, Niklas}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{A, B, \dots, Z\} \cup \{a, b, \dots, z\}$.

Geben Sie die *minimale* Wortmindestlänge $n(A)$ an, sodass eine Zerlegung gemäß des Pumping Lemmas existiert.

(b) Anwendung

(8 Punkte)

Beweisen Sie, dass $L := \{a^i b^j a^k \mid i = (j + k) \bmod 2, j \geq k \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe Y3: NP-Vollständigkeit

(12 Punkte)

Dateinamen: Y3_nmuster-1, Y3_nmuster-2, ...

Eine Menge von Unternehmen U stellt Kreditanfragen an eine Menge von Banken B . Eine Kreditanfrage (kurz: Anfrage) ist ein Tripel (u, b, w) , bestehend aus dem Unternehmen $u \in U$, welches die Anfrage stellt, der Bank $b \in B$, an welche die Anfrage gerichtet ist, und dem angefragten Wert $w \in \mathbb{N}$ des Kredits. Eine Anfrage kann von der entsprechenden Bank entweder in vollständiger Höhe angenommen oder ganz abgelehnt werden.

KREDITANFRAGEN

Gegeben: Zahlwert $X \in \mathbb{N}$, Menge von Banken B , Menge von Unternehmen U , Menge von Anfragen $K \subseteq U \times B \times \mathbb{N}$.

Gefragt: Gibt es eine Bank, die eine Auswahl von Anfragen $A \subseteq K$ annehmen kann, deren Wert in Summe genau X beträgt?

Zeigen Sie, dass das Problem KREDITANFRAGEN **NP**-schwer ist.

Das bei Ihrer Reduktion verwendete Problem \mathcal{X} muss aus der Vorlesung stammen. Geben Sie außerdem die Definition von \mathcal{X} nach dem bekannten Schema (Gegeben/Gefragt) an.

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur, Haupttermin SoSe 2020, 20. Juli 2020 — Phase Z

Aufgabe Z1: Rechnende Turingmaschine (10 Punkte)

Dateinamen: Z1_nmuster-1, Z1_nmuster-2, ...

Sei $a_0 = 1$ und $a_k = a_{k-1} + 3k$ für alle $k \geq 1$. Erstellen Sie eine deterministische TM, die bei Eingabe einer unär kodierte Zahl $k \geq 1$ die folgende Funktion berechnet:

$$f(k) := \begin{cases} a_k, & \text{wenn } k \text{ gerade ist,} \\ \text{undef,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ausgabe soll ebenfalls in Unärkodierung erfolgen. Ihre TM darf **nicht mehr als 20 Zustände** haben. Sie müssen die korrekte Syntax der Eingabe nicht prüfen.

Aufgabe Z2: Berechnen und Entscheiden (16 Punkte)

Dateinamen: Z2_nmuster-1, Z2_nmuster-2, ...

(a) Berechenbarkeit (6 Punkte)

Begründen Sie für die folgende Funktion, ob sie berechenbar ist. Als Eingaben sind nur **positive** natürliche Zahlen erlaubt.

$$f(x, y) := \begin{cases} \text{undef,} & \text{wenn } x/y < \pi \\ 2x \bmod 3y, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Entscheidbarkeit (10 Punkte)

Sei $\mathbb{W}(M)$ eine eindeutige Kodierung der Turingmaschine M über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Sei $L := \{\mathbb{W}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die bei irgendeiner Eingabe } w \in \{\square, \triangle\}^* \text{ hält}\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: L ist semi-entscheidbar.

Aufgabe Z3: **FPT**-Algorithmus (6 Punkte)

Dateinamen: Z3_nmuster-1, Z3_nmuster-2, ...

MAXIMAL- α -VARSAT

Gegeben: Aussagenlogische Formel F mit maximal $\alpha \in \mathbb{N}$ verschiedenen Variablen.

Parameter: α .

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Zeigen Sie durch Angabe eines (simplen) deterministischen Algorithmus, dass MAXIMAL- α -VARSAT in **FPT**-Zeit entscheidbar ist. Geben Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus so an, dass die Zugehörigkeit zu **FPT** direkt ablesbar ist.