Einführung in die Theoretische Informatik
Klausur, Haupttermin SoSe 2021, 19. Juli 2021

Aufgabe 1: Informationstheorie (10 Punkte)

(a) Erwartete Codewortlänge (4 Punkte)

Betrachten Sie die nebenstehende Tabelle für die Quelle (Σ, p).

Ist der gegebene Code $\mathbb{C}$ über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ ein Präfixcode minimaler erwarteter Codewortlänge? Begründen Sie.

σ	a	b	c	d	e	f	g
p_σ	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\mathbb{C}(\sigma)$	00	01	20	22	21	10	11

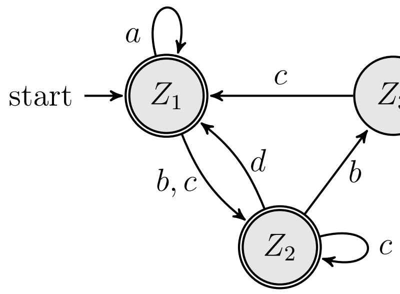
(b) Erwarteter Informationsgewinn (6 Punkte)

Sei $\varphi \colon \Sigma^* \to \{d, e, f, g\}^*$ eine *Filterfunktion*, welche die Zeichen a, b und c durch ε ersetzt und die übrigen Zeichen unverändert lässt. Sei m eine Nachricht, deren Zeichen jeweils unabhängig aus der oben angegebenen Quelle (Σ, p) stammen.

Bestimmen Sie den erwarteten Informationsgewinn der Nachricht $\varphi(m)$ in Abhängigkeit von $k := |\varphi(m)|$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis, bis es keine log-Terme mehr enthält.

Aufgabe 2: Umwandlung DEA $\to$ RegEx (8 Punkte)

Gegeben sei der rechts abgebildete DEA. Wandeln Sie ihn – gemäß dem Vorgehen aus der Vorlesung! – in einen regulären Ausdruck um.



Aufgabe 3: Pumping Lemma (10 Punkte)

(a) Wortmindestlänge (2 Punkte)

Betrachten Sie die reguläre Sprache $A := \mathcal{L}\big(b^+a^*\big)$. Geben Sie die *minimale* Wortmindestlänge $n(A)$ an, sodass eine Zerlegung gemäß dem Pumping Lemma existiert.

(b) Anwendung (8 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas, dass

$$L := \{a^i b^j a^k \mid i \bmod 3 = 1, (j+k) \bmod 3 = 0, i + k \leq j\}$$

nicht regulär ist.

Aufgabe 4: Rechnende Turingmaschine (10 Punkte)

Sie kennen die Binärkodierung $\mathbb{B}(\alpha)$ einer natürlichen Zahl α. Analog sei $\mathbb{Q}(\alpha)$ die *Quaternärkodierung* von α, d. h. ihre Kodierung zur Basis 4 mithilfe der Symbole $\{0, 1, 2, 3\}$.

Erstellen Sie eine deterministische TM mit Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, 2, 3, \$, \square\}$, die bei Eingabe $\mathbb{B}(\alpha)$ die folgende Funktion berechnet und **in Quaternärkodierung** ausgibt:

$$f(\alpha) \coloneqq \begin{cases} \alpha + 1, & \text{wenn } \alpha \bmod 4 \neq 3; \\ \texttt{undef}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel: Für die Dezimalzahl 19 ist $\mathbb{Q}(19) = 103$, denn $19 = 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Fallunterscheidung die Addition für Sie vereinfacht.

Aufgabe 5: Turing-Vollständigkeit (12 Punkte)

Eine 2-*vorlaufende Turingmaschine* ist eine rechnende Turingmaschine mit folgenden Modifikationen:

- Anstelle des Schreib-Lese-Kopfes gibt es einen Schreibkopf und einen Lesekopf.
- Der Schreibkopf steht 2 Zellen weiter rechts als der Lesekopf.
- Die Angabe der Bewegungsrichtung bei einem Übergang gilt für beide Köpfe gleichzeitig.
- Der Schreibkopf muss nicht bei jedem Übergang etwas schreiben; in diesem Fall wird anstelle des zu schreibenden Symbols am Übergang ε notiert.
- Zu Beginn bzw. Ende der Ausführung steht der Lesekopf auf dem ersten Symbol der Eingabe bzw. Ausgabe.

(a) Beweis (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass 2-vorlaufende Turingmaschinen mindestens genauso mächtig sind wie rechnende Turingmaschinen.

(b) Halteproblem (4 Punkte)

Ist das folgende Problem entscheidbar? Begründen Sie.

2-VorHalt	
Gegeben:	Eine 2-vorlaufende TM $\mathcal{M}$ mit Bandalphabet $\Gamma \coloneqq \{\square, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}$.
Gefragt:	Hält $\mathcal{M}$ bei Eingabe $\mathtt{2}$?

Aufgabe 6: Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit (14 Punkte)

(a) Berechenbarkeit (6 Punkte)

Begründen Sie für die folgende Funktion (mit Eingabe $x \in \mathbb{N}$), ob sie berechenbar ist:

$$f(x) := \begin{cases} \texttt{undef}, & \text{falls } x \text{ die Kodierung } \mathbb{W}(\mathcal{M}) \text{ einer TM } \mathcal{M} \text{ ist, die bei Eingabe } x \\ & \text{nicht terminiert oder eine Ausgabe der Länge 5 hat;} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Semi-Entscheidbarkeit (8 Punkte)

BROTZEIT	
Gegeben:	Rechnende Turingmaschine $\mathcal{M}$.
Gefragt:	Gibt es ein $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{M}$ bei Eingabe w mindestens dreimal nacheinander dieselbe Zelle des Speicherbandes liest?

Ist BROTZEIT semi-entscheidbar? Begründen Sie (ggf. genügt Pseudocode).

Aufgabe 7: Komplexität (14 Punkte)

(a) Pseudopolynomieller Algorithmus (8 Punkte)

PRIMZAHLMENGE	
Gegeben:	Endliche Menge natürlicher Zahlen $M \subseteq \mathbb{N}$.
Gefragt:	Sind alle Zahlen in M prim?

Geben Sie einen deterministischen Algorithmus an, der PRIMZAHLMENGE in **pseudopolynomieller Zeit** entscheidet, ohne einen Primzahltest als Blackbox zu verwenden. Begründen Sie.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass Sie für zwei natürliche Zahlen $\alpha < \beta$ in Zeit $\mathcal{O}(\log \beta)$ entscheiden können, ob β von α geteilt wird.

(b) Fixed-Parameter Tractability (6 Punkte)

Sei $\mathcal{X}$ ein Entscheidungsproblem, dessen Eingabe aus einem Graphen (ohne Mehrfachkanten) besteht. Zeigen Sie:

$$\mathcal{X} \text{ ist entscheidbar} \iff \mathcal{X} \in \textsf{\textit{FPT}} \text{ in Bezug auf die Knotenanzahl des Eingabegraphen.}$$

Aufgabe 8: *NP*-Vollständigkeit (16 Punkte)

Ein Rechteck $R = (x, y)$ ist gegeben durch seine beiden Kantenlängen $x, y \in \mathbb{N}$. Ein Rechteck heißt *nicht-trivial*, wenn beide Kanten mindestens Länge 2 haben. Der Flächeninhalt eines Rechtecks $R = (x, y)$ berechnet sich als $x \cdot y$.

SIEBTELFLÄCHE

Gegeben: Ein nicht-triviales Rechteck $Z = (x, y)$; Menge $\mathcal{R} = \{R_1, ..., R_n\}$ von nicht-trivialen Rechtecken mit $R_i = (x_i, y_i)$.

Gefragt: Gibt es eine Auswahl $A \subseteq \mathcal{R}$ von nicht-trivialen Rechtecken, sodass diese überlappungsfrei zu einem Rechteck angeordnet werden können, dessen Flächeninhalt genau ein Siebtel des Flächeninhalts von Z ist?

(a) Reduktion (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass SIEBTELFLÄCHE *NP*-schwer ist.

Das in Ihrer Reduktion verwendete Ausgangsproblem $\mathcal{X}$ muss aus der Vorlesung stammen. Geben Sie die Definition von $\mathcal{X}$ nach dem bekannten Schema (Gegeben/Gefragt) an.

(b) Komplexität (4 Punkte)

Tatsächlich ist SIEBTELFLÄCHE auch *NP*-vollständig. Angenommen es existiert ein deterministischer Algorithmus $\mathcal{A}$, der SIEBTELFLÄCHE in Polynomialzeit korrekt entscheidet. Gilt dann $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$? Begründen Sie.

Aufgabe 9: Randomisierte Algorithmen (10 Punkte)

In einer mündlichen Onlineprüfung (ohne Videoübertragung) sind für jede Prüfungsfrage exakt fünf Minuten für das Stellen der Frage und das Geben der Antwort vorgesehen. Für die zu prüfende Person gilt, dass sie (falls die Audioverbindung funktioniert) auf jede Frage mit einer unabhängigen Wahrscheinlichkeit $p > 3/4$ eine Antwort gibt (egal ob richtig oder falsch).

Es kann jedoch sein, dass die Audioverbindung nicht korrekt funktioniert – dann wird für keine der Prüfungsfragen eine Antwort übertragen und die Prüfung ist *zu annullieren*. Der Zustand der Audioverbindung steht vor Beginn der Prüfung fest und ändert sich dann nicht mehr.

(a) Algorithmus (4 Punkte)

Stellen Sie sich vor, dass Sie als Beisitzende*r eine einzelne Prüfung protokollieren müssen. Geben Sie einen *Co-RP*-Algorithmus für die Frage „Ist die Prüfung zu annullieren?“ an.

(b) Analyse (6 Punkte)

Sei k die Anzahl der Prüfungsfragen. Zeigen Sie, welche Fehlerwahrscheinlichkeiten Ihr Algorithmus (in Abhängigkeit von k) auf *JA*- und welche er auf *NEIN*-Instanzen hat.